

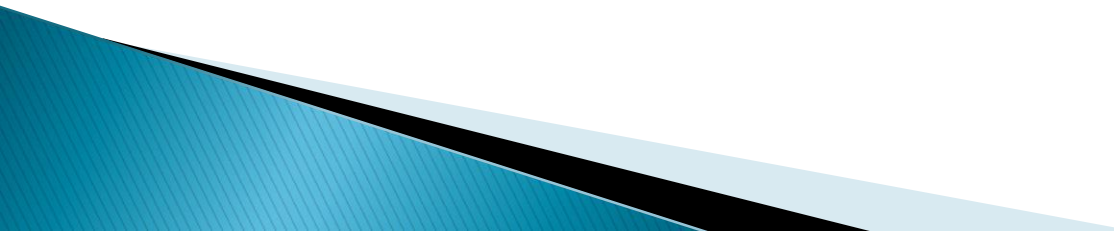
# Testy diagnostyczne

**Stanisław Cichocki**

**Natalia Nehrebecka**

**Zajęcia 9-10**

# Plan zajęć

1. Testy diagnostyczne
  2. Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej modelu
  3. Testowanie normalności składników losowych
  4. Testowanie stabilności parametrów
  5. Testowanie heteroskedastyczności
- 

# Testy diagnostyczne

- Służą do weryfikacji założeń KMRL
- Jeśli któreś z założeń nie jest spełnione ➡ należy zastanowić się nad przeformułowaniem modelu
- Testy są stosowane po wyestymowaniu modelu

# Testy diagnostyczne

► Dla każdego testu:

1. Nazwa testu
2. Hipotezy
3. Jakie założenie KMRL nie jest spełnione w przypadku odrzucenia  $H_0$ ?
4. Jakie są konsekwencje niespełnienia założenia KMRL?
5. W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testu?

# Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

- Test RESET (*Regression Specification Error Test*):

$$H_0 : y_i = x_i \beta + \varepsilon_i \quad - \text{liniowa postać modelu}$$

$$H_1 : y_i = f(x_i \beta) + \varepsilon_i \quad - \text{nieliniowa postać modelu}$$

gdzie  $f(\bullet)$  jest nieliniowa

# Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu $H_0$ ?

- ▶ Związek pomiędzy zmienną zależną a zmiennymi niezależnymi opisany jest równaniem:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

# Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

Odrzucenie hipotezy  
zerowej o  
poprawności przyjętej  
formy funkcyjnej

- podważa interpretację ekonomiczną modelu (interpretacja oszacowanych parametrów)
- niemożliwe udowodnienie własności estymatora MNK (nieobciążoność czy efektywność estymatora MNK)

# W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testu?

Przebudowanie modelu aby uwzględnić nieliniowość relacji między zmiennymi (możliwe, że zmienne modelu powinny być poddane jakiejś transformacji – logarytmowanie, potęgowanie, itp.)

pominięte zmienne objaśniające

autokorelacja składnika losowego

# Przykład

- ▶ Zmienna zależna: logarytm płac,
- ▶ Zmienne niezależne to: wiek, wiek podniesiony do kwadratu, płeć, wykształcenie (średnie, wyższe; za poziom bazowy przyjmujemy wykształcenie podstawowe), miejsce zamieszkania (małe miasto, średnie miasto, duże miasto; za poziom referencyjny przyjmujemy wieś) oraz stan cywilny – zmienna ta przyjmuje wartość 1, jeśli kawaler lub panna oraz 0 w pozostałych przypadkach

Model 1: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 1089 obserwacji 1-1089  
Zmienna zależna: stopaplac

| Zmienna       | Współczynnik | Błąd stand. | Statystyka t | Wartość p    |
|---------------|--------------|-------------|--------------|--------------|
| const         | 5,33901      | 0,221427    | 24,112       | <0,00001 *** |
| wiek          | 0,0342608    | 0,0109532   | 3,128        | 0,00181 ***  |
| wiek_2        | -0,000430220 | 0,000136223 | -3,158       | 0,00163 ***  |
| plec          | 0,353767     | 0,0312690   | 11,314       | <0,00001 *** |
| srednie       | 0,155550     | 0,0515332   | 3,018        | 0,00260 ***  |
| wyzsze        | 0,536299     | 0,0672018   | 7,980        | <0,00001 *** |
| malemiasto    | 0,139879     | 0,0701687   | 1,993        | 0,04646 **   |
| sredniemiasto | 0,245461     | 0,0384690   | 6,381        | <0,00001 *** |
| duzemiasto    | 0,345939     | 0,0473768   | 7,302        | <0,00001 *** |
| stan cywilny  | -0,145300    | 0,0472006   | -3,078       | 0,00213 ***  |

# Przykład

Następnie szacujemy równanie regresji rozszerzonej  
(zmienne  $y_2$  i  $y_3$  to odpowiednio wartości dopasowane podniesione do 2 i 3 potęgi):

Model 2: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 1089 obserwacji 1-1089  
Zmienna zależna: stopaplać

| Zmienna       | Współczynnik | Błąd stand. | Statystyka t | Wartość p |
|---------------|--------------|-------------|--------------|-----------|
| const         | 34,9684      | 129,450     | 0,270        | 0,78711   |
| wiek          | 0,271120     | 1,39976     | 0,194        | 0,84646   |
| wiek_2        | -0,00339804  | 0,0175760   | -0,193       | 0,84673   |
| plec          | 2,73339      | 14,4675     | 0,189        | 0,85018   |
| srednie       | 1,23758      | 6,36067     | 0,195        | 0,84577   |
| wyzsze        | 4,06587      | 21,9223     | 0,185        | 0,85290   |
| malemiasto    | 1,10371      | 5,71848     | 0,193        | 0,84699   |
| sredniemiasto | 1,92533      | 10,0379     | 0,192        | 0,84793   |
| duzemiasto    | 2,67553      | 14,1430     | 0,189        | 0,84999   |
| stan_cywilny  | -1,11569     | 5,93962     | -0,188       | 0,85104   |
| y_2           | -1,63377     | 6,25986     | -0,261       | 0,79415   |
| y_3           | 0,114252     | 0,319072    | 0,358        | 0,72036   |

Statystyka testu:  $F = 25,421338$ ,  
z wartością  $p = P(F(2,1077) > 25,4213) = 0,000000167$

## 2. Test Jarque – Bera



# Testowanie normalności składników los.

- Test Jarque – Bera (Test JB):

$H_0 : \varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$  - składnik los. ma rozkład normalny

$H_1 : \varepsilon \not\sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$  - składnik los. nie ma rozkładu normalnego

# Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu $H_0$ ?

- ▶ Niespełnione dodatkowe założenie o tym, że składnik losowy ma rozkład normalny

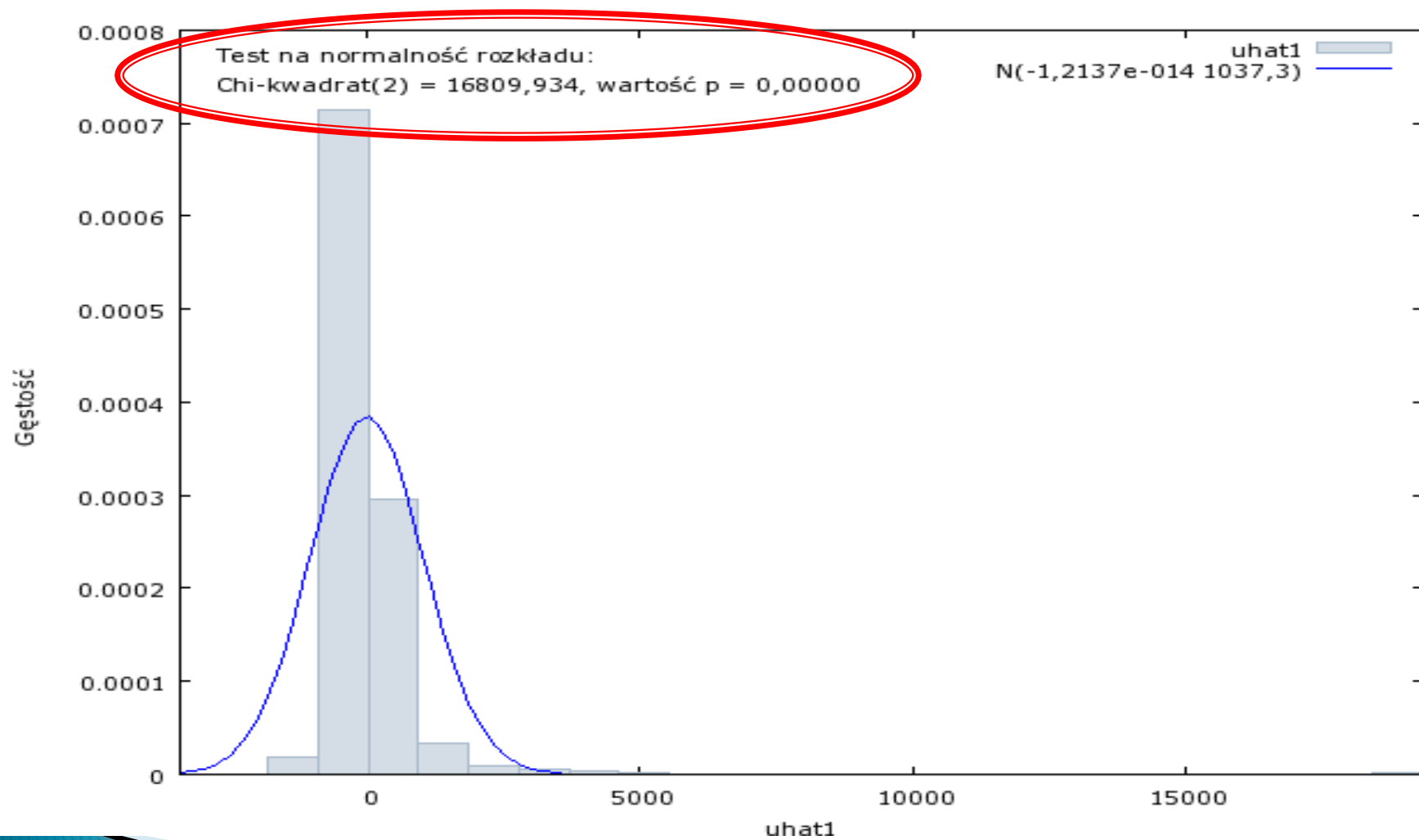
# Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

- ▶ **Próba duża:** rozkłady statystyk są bliskie standardowym rozkładom
- ▶ **Mała próba:** jest problemem, gdyż:
  - To założenie jest niezbędne do wyprowadzenia rozkładów statystyk testowych oraz prawidłowego wnioskowania statystycznego.
  - Estymator  $b$  uzyskany metodą MNK jest najlepszym estymatorem wśród *liniowych i nieobciążonych* estymatorów  $\longrightarrow$  można znaleźć estymator *nieliniowy i nieobciążony* o wariancji mniejszej niż estymator  $b$

# W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testów?

- ▶ Powiększenie próby, ponieważ dla większej próby rozkłady będą bliższe znanym rozkładom asymptotycznym

# Przykład



# 3. Test Chowa



# Testowanie stabilności parametrów

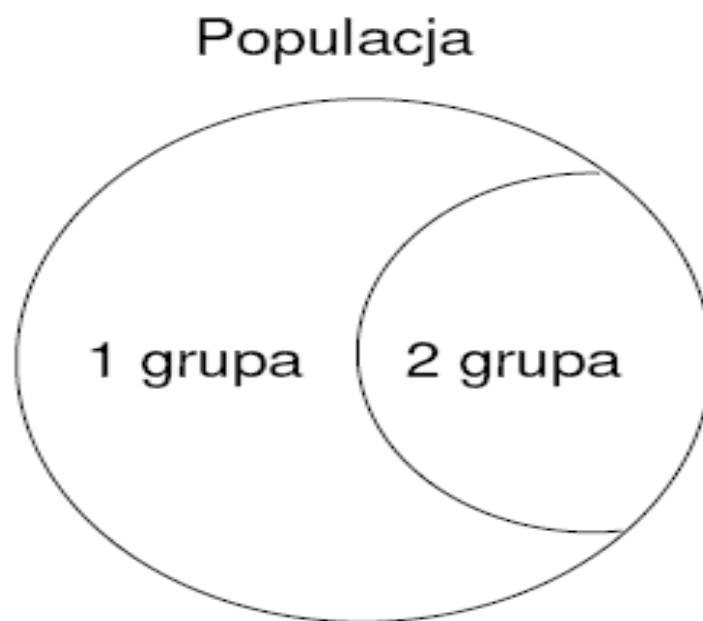
- Test Chowa:

Służy do weryfikacji czy parametry modelu będą takie same dla kilku różnych próbek

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m$  - parametry są takie same w próbkach

$H_1 : \beta_r \neq \beta_s$  - parametry różnią się w próbkach

# Dla próby przekrojowej



Rysunek 4: Podgrupy o podobnej wielkości

# Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu $H_0$ ?

- ▶ Związek pomiędzy zmienną zależną a zmiennymi niezależnymi opisany jest równaniem:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

# Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

Odrzucenie hipotezy zerowej o tym, że parametry są stabilne

- podważa interpretację ekonomiczną modelu (interpretacja oszacowanych parametrów)
- niemożliwe udowodnienie własności estymatora MNK (nieobciążoność czy efektywność estymatora MNK)

# W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testu?

- ▶ Problem niestabilności parametrów można rozwiązać poprzez estymacje osobnych regresji na wyodrębnionych próbach.

# 4. Testowanie homoskedastyczności składnika losowego



# Testowanie heteroskedastyczności

Przypomnienie: Co to znaczy, że w modelu występuje  
homoskedastyczność/heteroskedastyczność?

- heteroskedastyczność

$$\text{Var}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \text{Var}(\varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ \text{Cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & \text{Var}(\varepsilon_2) & \cdots & \text{Cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & \cdots & \text{Var}(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

# Testowanie heteroskedastyczności

- Test Goldfelda-Quandt (Test GQ):

$$H_0 : Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad \text{dla } i = 1, \dots, N$$

$$H_1 : Var(\varepsilon_i) > Var(\varepsilon_j) \quad \text{dla } z_i > z_j \text{ gdzie } z \text{ jest pewną zmienną}$$

- Hipoteza zerowa: homoskedastyczność
- Hipoteza alternatywna: heteroskedastyczność

# Testowanie heteroskedastyczności

- Test Goldfelda-Quandta (Test GQ):
- Jako jedyny z testów na heteroskedastyczność ma rozkład wyprowadzony dla małych prób

# Testowanie heteroskedastyczności

- Test Breuscha-Pagana (Test BP):

$$H_0 : Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad \text{dla } i = 1, \dots, N$$

$$H_1 : Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 f(\alpha_0 + z_i \alpha)$$

gdzie  $f(\bullet)$  - funkcja różniczkowalna

$z_i$  - wektor zmiennych, może zawierać zmienne występujące w wektorze zmiennych objaśniających

# Testowanie heteroskedastyczności

- Test Breuscha-Pagana (Test BP):
- Hipoteza zerowa: homoskedastyczność
- Hipoteza alternatywna: heteroskedastyczność
- Szczególną postacią testu BP jest test White'a   
 $Z_i$  zawiera wszystkie kwadraty i iloczyny krzyżowe zmiennych objaśniających

# Testowanie heteroskedastyczności

- Test BP i White'a są bardziej uniwersalne niż test GQ  
jednak rozkłady statystyk testowych dla tych testów są znane  
tylko dla dużych prób
- Przy małych próbach stosujemy test GQ, przy dużych próbach  
test BP i White'a

## Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu $H_0$ ?

- ▶ Homoskedastyczność składnika losowego – wariancja błędu losowego jest stała dla wszystkich obserwacji:

$$\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N$$

# Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

- ▶ Estymatory MNK  $b$  są nadal nieobciążone i zgodne, ale nieefektywne, co oznacza, że ich błędy standardowe nie są najmniejsze z możliwych.
- ▶ Estymator macierzy wariancji-kowariancji  $b$  jest już obciążony i niezgodny. Macierz wariancji-kowariancji jest wykorzystywana do testowania hipotez na temat istotności zmiennych, więc poprawność wnioskowania statystycznego jest podważona.
- ▶ Estymator  $s^2$  jest obciążony ale zgodny

# W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testów?

- ▶ Estymator odporny White'a
- ▶ Stosowalna UMNK

# Pytania teoretyczne

1. Za pomocą jakiego testu weryfikujemy normalność składnika losowego? Jaka jest hipoteza zerowa i alternatywna w tym teście?
2. Za pomocą jakiego testu weryfikujemy prawidłowość formy funkcyjnej? Jaka jest hipoteza zerowa i alternatywna w tym teście?
3. Za pomocą jakiego testu weryfikujemy stabilność parametrów? Jaka jest hipoteza zerowa i alternatywna w tych testach?
4. Za pomocą jakich testów testuje się heteroskedastyczność? Jaka jest hipoteza zerowa i alternatywna w tych testach?

**Dziękuję za uwagę**